13.5. Un premier point de vue : Giulio Fagnano

13.5.1. La lemniscate de Bernoulli

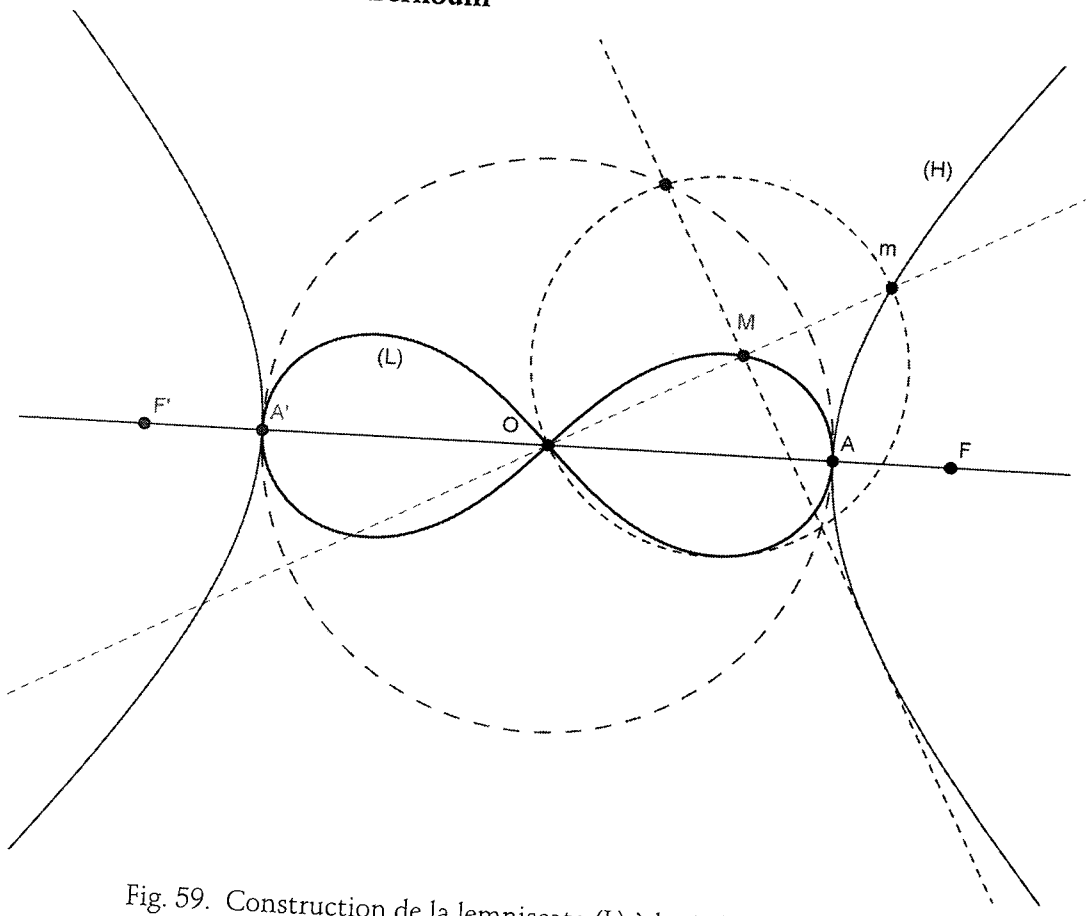

Fig. 59. Construction de la lemniscate (L) à la règle et au compas[1].

Rappelons tout d'abord quelques propriétés de base de la lemniscate de Bernoulli[2] : lorsqu'on prend l'hyperbole équilatère (H) d'équation $x^2 - y^2 = 1$, ensemble des points tels que $|FM - F'M| = 2$ où $F(\sqrt{2}, 0)$ et $F'(-\sqrt{2}, 0)$ et que l'on opère une inversion de pôle O et de puissance 1 (le cercle d'inversion est le cercle unité C, son écriture complexe est $z \to \frac{1}{\bar{z}}$), on obtient la lemniscate (L) d'équation

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + y^2 - x^2 = 0$$

dont la traduction en coordonnées polaires est $r^2 = \cos 2\theta$, ce qui donne également $GM.G'M = \frac{1}{2}$ où $G(1/\sqrt{2}, 0)$ et $G'(-1/\sqrt{2}, 0)$ sont les « foyers » de la lemniscate.

---

[1] Le point m sur l'hyperbole (H) de foyers F et F' (d'équation $x^2 - y^2 = 1$) a pour image M sur (L) par l'inversion de centre O, le cercle d'inversion (dont le rapport est le carré du rayon) a pour rayon 1. Le cercle de diamètre [Om] a pour image la tangente à (H) passant par m, il est tangent à (L).

[2] http://www.mathcurve.com/courbes2d/lemniscate/lemniscate.shtml ainsi que http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Lemniscate.html

Le fait que dans la même transformation le cercle unité, dont les liens avec (H) sont profonds, reste invariant laisse penser que des relations intimes doivent exister entre ces deux objets. Par ailleurs lorsqu'on fait la simple opération $z \to \frac{1}{z}$ un point de (C) reste sur (C), un point de (H) va sur (L), un point de (L) va sur (H). Tout ceci est assez simple à vérifier.

Reprenons la définition polaire de (L) : $r^2 = \cos 2\theta$ et dérivons des deux côtés :

$$2rdr = -2d\theta \sin 2\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{r}{\sin 2\theta}dr = -\frac{r}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}dr = -\frac{r}{\sqrt{1-r^4}}dr \ ;$$

en coordonnées polaires l'élément différentiel de longueur est donné par $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, soit pour (L) :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = dr^2 + r^2 \frac{r^2}{1-r^4}dr^2 = \frac{1}{1-r^4}dr^2 \Rightarrow ds = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr \ ;$$

la longueur d'un arc $\widehat{OM(u)}$ entre O et M « d'abscisse lemniscatique » u est donc

$$s(u) = \int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} .$$

Posons $\cos 2\theta = t$, $0 \le t \le 1$, on a $r = \sqrt{t}$ et $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+t)$, d'où $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}$; de même $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t}$, soit en passant en coordonnées cartésiennes : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t+t^2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t-t^2}$ puis avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[\frac{(1+2t)^2}{8t(1+t)} + \frac{(1-2t)^2}{8t(1-t)}\right]dt^2 = \frac{1}{4t(1-t^2)}dt^2 ,$$

on obtient la longueur d'un arc $s(u) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}$, $0 \le u \le 1$.

13.5.2. Division en deux arcs égaux

Dans s sous la forme $s(u) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}$, $0 \le u \le 1$, faisons le changement de variable $t \to \lambda(t) = \frac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, $dt = \frac{-2}{(1+\lambda)^2}d\lambda$:

13.5.2.1 $$s(u) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}} = -\frac{1}{2}\int_1^{\lambda(u)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}} .$$

Nous constatons que pour u dans $[0\,;1]$ les arcs $\widehat{OM(u)}$ et $\widehat{AM(\lambda(u))}$ ont même longueur (A est le point de coordonnées $(1\,;0)$) ; lorsque $u = \lambda(u)$, soit lorsque $u = \sqrt{2}-1$, le point $M(\sqrt{2}-1)$ sépare l'arc de lemniscate en deux partie de même longueur.

Ce point a pour coordonnées $x(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}, y(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3\sqrt{2}-4}$, nombres constructibles à la règle et au compas ; en polaires on a $\cos 2\theta=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \theta=\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ et $r=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

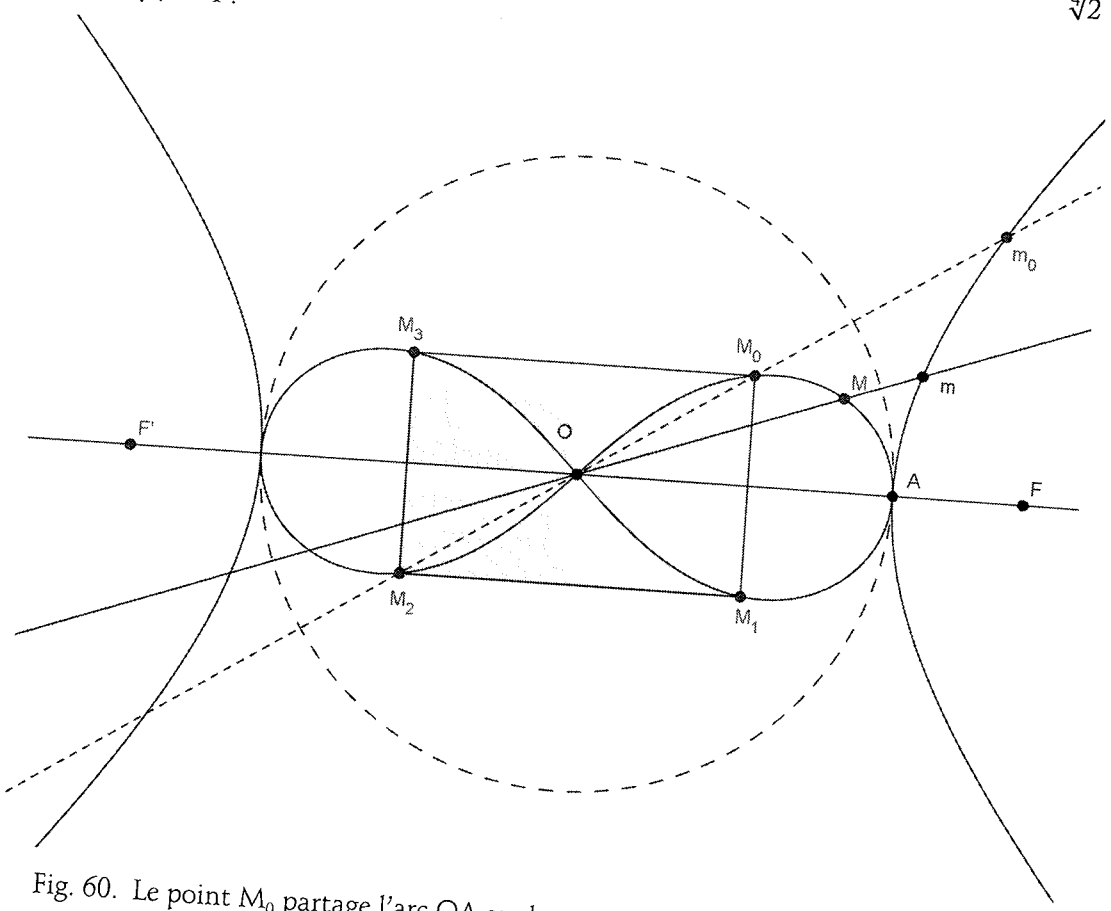

Fig. 60. Le point M_0 partage l'arc OA en deux parties égales, les autres sommets du rectangle correspondent aux autres solutions[1].

13.5.3. Division en trois arcs égaux

Cette première étape donne l'idée de découper en trois parties égales mais les choses sont un peu moins simples. Dans le cas précédent on est arrivé à couper en deux grâce à l'égalité $\frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}=\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}$: il nous faut « au moins » trouver une transformation $t\to\lambda(t)$ de sorte que $\frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}=2\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}$ ou encore avec l'écriture en polaires $\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=2\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}$.

En l'occurrence voici les diverses étapes :

---

[1] En fait c'est analogue à l'inscription d'un carré dans un cercle, le paramètre $t=\sqrt{2}-1$ correspondant à l'angle $t=\pi/4$ dans le cercle. On a représenté sur l'hyperbole (H) le point m_0 inverse du sommet M_0.

* on repart sur les coordonnées $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t+t^2}, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t-t^2}$ en posant $t=z^2$ ce qui donne $x=\frac{1}{\sqrt{2}}z\sqrt{1+z^2}, y=\frac{1}{\sqrt{2}}z\sqrt{1-z^2}$; on vérifie que l'arc $\widehat{OM(z)}$ a pour longueur $\int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$;

* on effectue le changement de variable $y^2=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, soit $\int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=\int_y^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$;

* on pose $y=\frac{1-w^2}{1+w^2}$ d'où $z=\frac{w\sqrt{2}}{\sqrt{1+w^4}}$ et $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=\sqrt{2}\frac{dw}{\sqrt{1+w^4}}$;

* on pose alors $w=\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{1-v^4}}$, soit $v=\frac{z}{\sqrt{\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)\left(1+\sqrt{1+z^2}\right)}}$;

* et enfin $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=2\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$ qui correspond à ce qu'on cherche.

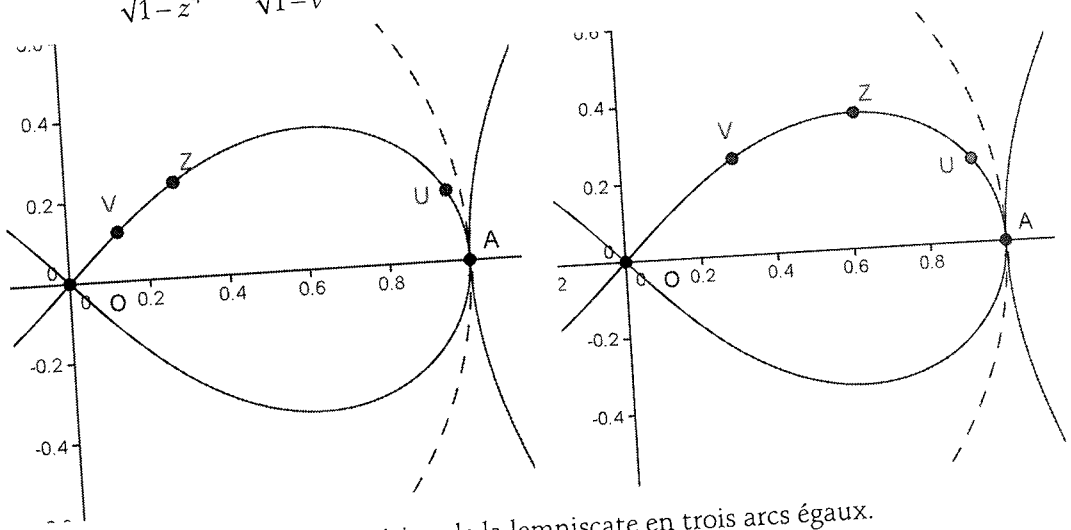

Fig. 61. Division de la lemniscate en trois arcs égaux.

En fait quand v avance, z parcourt une distance double sur (L) ; pour diviser en 3 il faut repartir en sens inverse de A avec un point u : lorsque u sera confondu avec z l'arc sera divisé en 3 ;

* on pose enfin $u^2=\frac{1-v^2}{1+v^2}$ qui va jouer le même rôle que λ dans le cas précédent (transformation de Landen).

Maintenant il faut revenir en arrière en prenant $u=z$:

$$u^2=\frac{1-v^2}{1+v^2}=z^2 \Rightarrow v^2=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ w=\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{1-v^4}} \Rightarrow w^2=\frac{2v^2}{1-v^4}=\frac{1-z^4}{2z^2},$$

$$y=\frac{1-w^2}{1+w^2}=\frac{z^4+2z^2-1}{-z^4+2z^2+1} ;$$

comme $y^2 = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, on a en posant $Z = z^2$: $\dfrac{1-Z}{1+Z} = \dfrac{\left(Z^2+2Z-1\right)^2}{\left(-Z^2+2Z+1\right)^2}$.

* Cette équation se simplifie en $Z^4+6Z^2-3=0$, ce qui donne $Z=\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ et $z=\sqrt{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}=\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}\approx 0{,}82537872$; on en déduit que

13.5.3.1 $$y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}\approx 0{,}4354205,$$

ainsi que les coordonnées x et y : pour z on a

13.5.3.2 $$x=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}\sqrt{2+2\sqrt{2\sqrt{3}-3}},\ y=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}\sqrt{2-2\sqrt{2\sqrt{3}-3}}\text{, etc.}$$

Dans tous les cas seules apparaissent des opérations algébriques autorisant une construction à la règle et au compas, ce qui montre que ces points sont bien *constructibles*.

La division en 5 peut s'effectuer de la même manière, mais la recherche des diverses transformations devient assez terrible, de plus la question de fond reste la division en n arcs égaux et ces méthodes ne peuvent donner de résultats probants. On montre que les seules divisions réalisables à la règle et au compas sont **exactement** celles du cercle, à savoir la division par les nombres de Fermat premiers (2, 3, 5, 17, 257 et 65537) et leurs dérivés (produits et puissances) ; voir [Eym] ou [Abe].

13.5.4. Une intervention d'Euler

Fagnano avait donc envoyé son travail à Euler à St-Petersbourg vers 1750, lequel reconnut la qualité des idées ; il s'aperçut assez facilement de la ressemblance des intégrales précédentes avec l'intégrale définissant arc sinus : grâce à la formule d'addition $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a=\sin a\sqrt{1-\sin^2 b}+\sin b\sqrt{1-\sin^2 a}$ puis en posant $u=\sin a \Leftrightarrow a=\arcsin u$, $v=\sin b \Leftrightarrow b=\arcsin v$, on a

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}=\int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}+\int_0^v \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \text{ lorsque } r=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}.$$

L'idée est alors de trouver une formule semblable pour les fonctions du type $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$, quelque chose comme $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}=\int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}+\int_0^v \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ avec $r=u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}$, malheureusement on trouve, lorsque $u=v$, que $r=2u\sqrt{1-u^4}$ alors que le dédoublement donne une formule du type $r=\dfrac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ ([Hel, 2.2] pour les calculs). Cette piste débouche sur pas mal de choses (c'était d'ailleurs l'idée initiale d'Abel) que nous retrouverons en 13.10.

13.6. Longueurs

Dans ce qui précède les divisions s'effectuent sans tenir compte de la longueur de (L), au même titre que la division d'un cercle peut se faire sans connaître son périmètre puisqu'il s'agit uniquement d'opérations algébriques (en tout cas pour les cas 2, 3, 5,...

et leurs dérivés). Pour aller plus loin la longueur de l'arc de (L) semble quand même assez nécessaire. Ce problème est en fait lié à la résolution de l'équation du pendule, aussi allons nous regarder cet exemple physique.

13.6.1. Les vraies périodes du pendule

Le pendule dont il s'agit ici n'est plus le pendule simple où la masse de la tige est considérée comme nulle : la masse totale du pendule est m, le centre de gravité est en G, situé à une distance h de O. Le moment d'inertie du pendule par rapport à un axe horizontal qui passerait par G est mk^2, de sorte que le moment d'inertie du pendule par rapport à un axe horizontal passant par O est $m(h^2+k^2)$. À $t=0$ le pendule est vertical, à t quelconque on a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}\right)=\theta$.

En égalant les moments d'inertie par rapport à O on a donc l'équation du mouvement avec la loi de Newton :

$$m(h^2+k^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgh\sin\theta .$$

On simplifie par hm : $(h+\frac{k^2}{h})\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta$, on pose $h+\frac{k^2}{h}=l$ d'où on tire $l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta$. Prolongeons OG en P de sorte que $OP=l$, $GP=\frac{k^2}{h}$; le point P est le **centre d'oscillation** ou de **percussion**, l s'appelle la longueur du pendule simple équivalent au pendule composé.

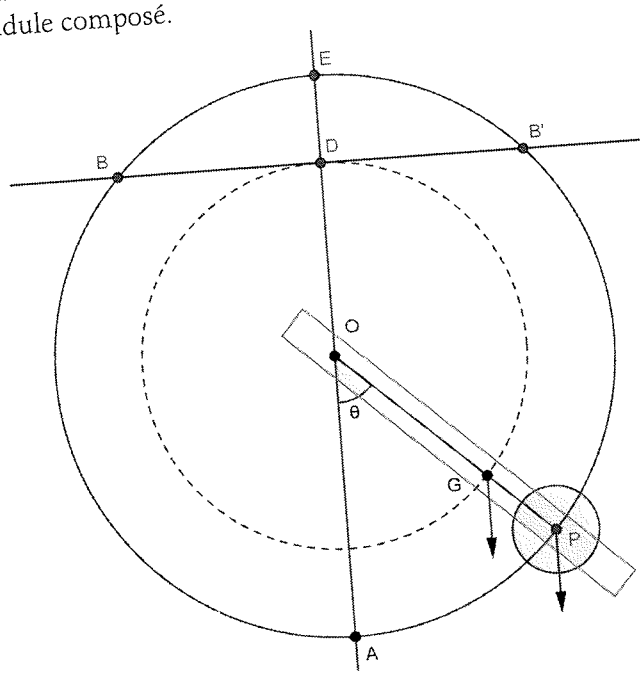

Fig. 62. Le pendule composé.

Reprenons l'équation $l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta$, multiplions des deux côtés par $\frac{d\theta}{dt}$ et intégrons, on tire immédiatement

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C - g(1-\cos\theta) \Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C' - \frac{g}{l}(1-\cos\theta).$$

Lorsque $t = 0$, $\theta = \alpha$ (angle initial), $\frac{d\theta}{dt} = 0$, soit $C' = \frac{g}{l}(1-\cos\alpha)$; l'équation définitive est alors

13.6.1.1 $$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Posons maintenant $\frac{g}{l} = \omega^2$, les formules de trigonométrie donnent $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, l'équation 13.6.1.1 devient :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \pm 2\omega\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \omega t = \pm\frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Jusque-là il n'y a rien de bien neuf.

Sur la Fig. 62 nous rajoutons le point N, projeté orthogonal de P sur (OA), le cercle (C') de diamètre $[AD]$, le point Q intersection de $[NP]$ et (C') ; l'angle $\widehat{ADQ}$ est noté ϕ.

On a alors $AN = l(1-\cos\theta) = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}$ lorsqu'on projette P sur (OA), mais également

$$AN = \frac{1}{2}AD(1-\cos 2\phi) = AD\sin^2\phi = l(1-\cos\alpha)\sin^2\frac{\phi}{2} = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}$$

d'où (les sinus sont tous pris positifs)

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi.$$

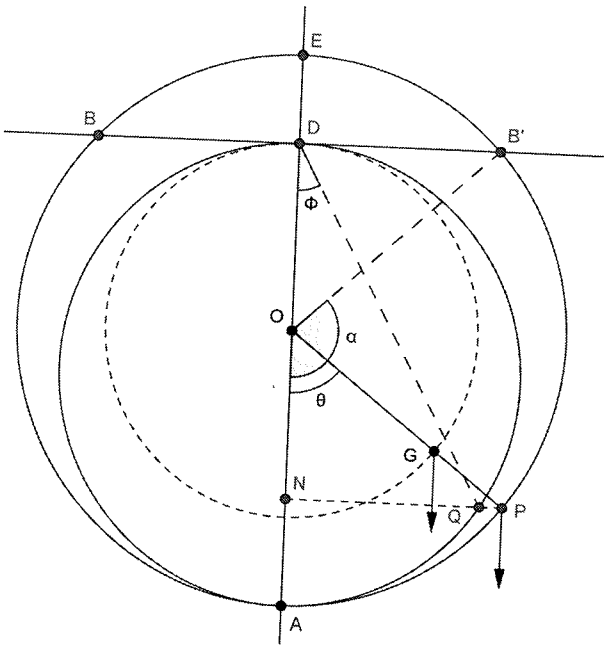

Fig. 63. Le pendule et les fonctions elliptiques.

Ceci donne $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\phi$ et $\frac{\theta}{2}=\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi\right)$ d'où

13.6.1.2 $$\frac{1}{2}d\theta=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}} \text{ et } \omega t=\pm\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}.$$

L'intégrale se ramène à la première forme de Legendre $u(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ en posant (on ne prend que la valeur positive)

13.6.1.3 $$k^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow k=\sin\frac{\alpha}{2},$$

k est appelé le **module** et $\frac{\alpha}{2}$ est l'**angle modulaire** (pas mal de choses là-dessus en physique dans [Gre] et sur [Wik, *Fonction_elliptique_de_Jacobi*]).

13.6.2. Première définition des fonctions elliptiques

Legendre a effectué les calculs numériques de ces intégrales au moyen de développements en série, lesquels sont en général très rapidement convergents ; il en a sorti des tables qui furent utilisées jusqu'à l'apparition des ordinateurs. Par contre Abel réalise l'inversion de ces intégrales en définissant les fonctions suivantes (nous utilisons la notation de C. Gudermann, quasiment identique à celle de Jacobi mais la traduction est simple à faire dans celles d'Abel : φ, f, F ; cf. [Abe] ainsi que [Whi]).

Dans $u(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$, on pose $\theta=\mathrm{am}(u)=\mathrm{am}\,u$ ($\mathrm{am}\,u$ = **amplitude** de u), soit

$$u(\mathrm{am}\,u)=\int_0^{\mathrm{am}\,u}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

et on définit ainsi plusieurs **fonctions elliptiques** :

$$\cos(\mathrm{am}\,u)=\mathrm{cn}\,u,$$

(lire **c**, **n**, ***u*** en détachant les lettres, on a également l'appellation **cos amp**),

$$\sin(\mathrm{am}\,u)=\mathrm{sn}\,u,\ \sqrt{1-k^2\sin^2(\mathrm{am}\,u)}=\mathrm{dn}\,u\ ;$$

lorsqu'il y a ambiguïté sur le module k on le précise : par exemple $\mathrm{dn}(u,k)$ (il semble que la notation dn vienne de l'écart $\Delta\theta=\Delta\,\mathrm{am}\,u$).

Quelques dérivées : on a évidemment à partir de $u(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$:

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}\Rightarrow\frac{d\theta}{du}=\frac{d\,\mathrm{am}\,u}{du}=\mathrm{dn}\,u\ ;$$

on dérive donc $\cos(\mathrm{am}\,u)=\mathrm{cn}\,u$:

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du}=-\sin(\mathrm{am}\,u)\frac{d\,\mathrm{am}\,u}{du}=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\ ;$$